__Ισοσυνέχεια__ $A \subseteq C(X)$ ισοσυνεχές στο $x_0 \in X$ αν $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_{x_0,\varepsilon}$: $\forall x \in X$ με $d(x,x_0)<\delta$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, $\forall f \in A$

A ισοσυνεχές, αν A ισοσυνεχές στο x_0 $\forall x_0 \in X$

• Αν $A \subseteq C(X)$, A συμπαγές $\Rightarrow A$ ισοσυνεχές

$\underline{\Theta}$ (Arzelà-Ascoli). Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ., $A \subseteq C(X)$

ΤΑΕΙ (i) A φραγμένο κλειστό στον $(C(X),D)$

(ii) A κλειστό φραγμένο (στον μετρικό χώρο $C(X),D$) κ' ισοσυνεχές

__Πόρισμα__ Κάθε ομοιόμορφα φραγμένη κ' ισοσυνεχής ακολουθία συναρτήσεων από συμπαγή μ.χ., έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία

__Λήμμα__ (Διαγώνιο επιχείρημα του Cantor)

Έστω $\{f_n\}$ μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$ κ' $x_1, x_2, \ldots \in X$. Τότε $\exists \{h_n\}$ υπακολουθία της $\{f_n\}$ τ.ω. $\{h_n(x_k)\}_{n=1}^{\infty}$ να συγκλίνει $\forall k \in \mathbb{N}$

__Απόδ__ $\exists M>0$, τ.ω. $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$

• $\{f_n(x_1)\}$ φραγμένη $\overset{B-W}{\Longrightarrow} \exists$ υπακολουθία $\{g_n^1\}_{n}^{\infty}$ της $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, τ.ω. $\{g_n^1(x_1)\}$ συγκλίνει

• $\{g_n^1(x_2)\}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists$ υπακολουθία $\{g_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ της $\{g_n^1\}_{n=1}^{\infty}$, έτσι $\{g_n^2(x_2)\}$ να συγκλίνει

• Ομοίως $\exists$ υπακολουθία $\{g_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ της $\{g_n^{k-1}\}_{n=1}^{\infty}$ τ.ω. $\{g_n^k(x_k)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει

$g_1^1 \quad g_2^1 \quad g_n^1$

$g_1^2 \quad g_2^2 \quad g_n^2$

$g_1^k \quad g_2^k \quad g_n^k$

Η ακολουθία $\{g_n^n\} = \{h_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{f_n\}$ και $\{g_n^n\}_{n \geq k}$ είναι υπακολουθία της $\{g_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_n h_n(x_k) = \lim_n g_n^n(x_k) \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

22-12-21
Πραγματική Ανάλυση

↳ Πρώτη ώρα σε φωτο

<u>Απόδειξη</u> (Α17)

(ii) ⇒ (i)

Έστω $\{f_n\} \subseteq \mathcal{A}$

Επειδή $\mathcal{A}$ κλειστό, αρκεί ν.δ.ο. $\exists$ υπακολουθία $\{h_n\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $\{h_n\}$ να συγκλίνει ομοιόμορφα

- $\exists M>0$ τ.ω. $|f_n(x)| \le M$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in X$ (από υπόθεση)
- $\{f_n\}$ ισοσυνεχής $\Longrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in X$, $\exists \delta(n,x)>0$ ώστε $\forall y\in X$ με $d(x,y)<\delta(n,x)$ να ισχύει $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{1}{k}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

↳ Για ε πήραμε το $\frac{1}{k}$, στον ορισμό της ισοσυνέχειας

- $X=\bigcup_{x\in X} B(x,\delta(n,x)) \xrightarrow{X\ \text{συμπαγής}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists F_n\subseteq X$, F_n πεπερασμένο ώστε $X=\bigcup_{y\in F_n} B(y,\delta(n,y))$ και ισχύει
$|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{1}{k}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall y\in F_n$, $\forall x\in B(y,\delta(n,y)) := V_{n,y}$

- <u>Θέτουμε</u> $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longrightarrow F$ το πολύ αριθμήσιμο
(το προηγούμενο βήμα με άλλα λόγια για την αντίστοιχη απόδειξη)

↳ <u>Πόρισμα</u>: Έστω $\{f_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία <u>συναρτήσεων</u> από τον μ.χ. (X,d) (→ συνέχεια πιο)

Έστω $F \subseteq X$, όπου F το πολύ αριθμήσιμο. Τότε $\exists \{h_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{f_n\}$ ώστε $\{h_n(y)\}$ να συγκλίνει $\forall y \in F$

/—/

Η $\{f_n\}$ είναι ομ. φραγμένη $\Rightarrow \exists \{h_n\}$ υπακολουθία της $\{f_n\}$ ώστε $\{h_n(y)\}$ να συγκλίνει $\forall y \in F$

έστω $\varepsilon > 0$

• Έστω $\kappa \in \mathbb{N}$. Αν $y \in F_\kappa$, τότε $\{h_n(y)\}$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{h_n(y)\}$ Cauchy $\Rightarrow$

$\xRightarrow[\text{πεπερ}]{F_\kappa} \exists n_0 = n_0(\kappa) \in \mathbb{N}$, ώστε $\forall n, m \geq n_0$ να ισχύει

$$\boxed{|h_n(y) - h_m(y)| < \cancel{\ldots} \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in F_\kappa} \quad (1)$$

(Εδώ καταλαβαίνουμε γιατί είναι σημαντικό να είναι συμπαγής ο μ.χ.)

(F_κ πεπερ $\rightarrow$ μπορώ να πάρω $\max\{n_0\}$

F_κ αριθμ. $\rightarrow$ δεν μπορώ να πάρω $\max\{n_0\}$)

• Έστω $x \in X$. Τότε $X = \bigcup_{y \in F_\kappa} V_{\kappa, y} \Rightarrow \exists y \in F_\kappa$ ώστε

$$|h_n(y) - h_n(x)| < \frac{1}{\kappa}$$

(2)

• Διαλέγω $\kappa \in \mathbb{N}$, ώστε $\frac{1}{\kappa} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \exists y \in F_\kappa$ ώστε

$$|h_n(y) - h_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall n, m \geq n_0(k) = n_0(\varepsilon)$, ισχύει

$\Leftrightarrow |h_m(x) - h_n(x)| \leq |h_m(x) - h_m(y)| + |h_m(y) - h_n(y)| + |h_n(y) - h_n(x)|$

$\xrightarrow[(1)]{(2)} |h_m(x) - h_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow |h_m(x) - h_n(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow \{h_n\}$ οµ. Cauchy $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{h_n\}$ συγκλίνει οµοιόµορφα